2024 **年千葉大学問題** 4

p, q は $p > q$ を満たす正の整数です。
${}_nC_2 \leqq {}_pC_2 + {}_qC_1$ となる最大の整数 n を求めてください。

解説・解答

$n \geqq 2$ で ${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ は単調増加です。

p, q は $p > q$ を満たす正の整数より $p \geqq 2$ です。
${}_qC_1 = q \geqq 1$ なので ${}_pC_2 < {}_pC_2 + {}_qC_1$ です。
よって $n = p$ のときは条件 ${}_nC_2 \leqq {}_pC_2 + {}_qC_1$ を満たしています。

$p > q$，${}_pC_1 = p$，${}_qC_1 = q$ なので ${}_qC_1 < {}_pC_1$ です。各辺に ${}_pC_2$ を加えます。
${}_pC_2 + {}_qC_1 < {}_pC_2 + {}_pC_1 = \dfrac{p(p-1)}{2} + p = \dfrac{(p+1)p}{2} = {}_{p+1}C_2$ です。
よって $n = p + 1$ のときは条件 ${}_nC_2 \leqq {}_pC_2 + {}_qC_1$ を満たしていません。

以上より、条件を満たす最大の整数は $n = p$ です。