2024 **年東北大学理系問題** 5

m, n は $2 \leqq m < n$ を満たす整数です。
$(2m-3)^n = (2n-3)^m$ となる組 (m, n) を求めてください。

解説・解答

$(2m-3)^n=(2n-3)^m$ の両辺の対数をとると $n\log(2m-3)=m\log(2n-3)$ です。
さらに両辺を mn で割ると $\dfrac{\log(2m-3)}{m}=\dfrac{\log(2n-3)}{n}$ です。

$f(x)=\dfrac{\log(2x-3)}{x}$ と置き、微分して $f'(x)=\dfrac{2x-(2x-3)\log(2x-3)}{(2x-3)x^2}$ です。
$x\geqq 2$ で $f'(x)$ の分母は正なので分子を調べます。
$g(x)=2x-(2x-3)\log(2x-3)$ と置き、微分して $g'(x)=-2\log(2x-3)$ です。
$x\geqq 2$ で $g'(x)<0$ なので $g(x)$ は単調減少です。
$g(2)=4>0,\quad \log 3>1$ なので $g(6)=12-9\log 9=12-18\log 3<0$
α は $2<\alpha<6$, $g(\alpha)=0$ を満たす実数とします。
$f(x)$ は $2\leqq x<\alpha$ で増加, $x=\alpha$ で極大, $\alpha<x$ で減少です。

m,n は $2\leqq m<n$ を満たす整数で $f(m)=f(n)$ なので $2\leqq m<\alpha<n$ です。
$f(4)-f(5)=\dfrac{\log 5}{4}-\dfrac{\log 7}{5}=\dfrac{\log 5^5-\log 7^4}{20}=\dfrac{\log 3125-\log 2401}{20}>0$
$f(2)<f(3)<f(4)>f(5)>f(6)>f(7)>\cdots$ なので $m=2,3,4$ です。

$f(2)=0,\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(2n-3)}{n}=0$ より $f(2)=f(n)$ を満たす n はありません。

$f(3)=\dfrac{\log 3}{3}=\dfrac{2\log 3}{2\cdot 3}=\dfrac{\log 9}{6}=f(6)$ です。

$f(4)>f(5)$ より $f(4)=f(n)$ を満たす n はありません。

以上より $(m,n)=(3,6)$ です。