2024 年大阪大学文系問題 3

素数を小さい順に $p_1, p_2, p_3, \cdots$ とします。
$n \geqq 12$ のとき不等式 $p_n > 3n$ が成り立つことを示してください。

解説・解答

素数を小さい順に書き出します。
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \cdots$
$p_{12} = 37$ です。

6 で割った余りが 0, 2, 4 なら 2 の倍数、0, 3 なら 3 の倍数です。
3 より大きな素数を 6 で割った余りは 1, 5 に限られます。
6 で割った余りが 1, 5 でも素数とは限りません。

37 以上で 6 で割った余り 1, 5 のものを小さい順に $a_{12}, a_{13}, a_{14}, \cdots$ と置きます。
$p_n \geqq a_n \ (n \geqq 12)$ です。

$a_{12} = 37, a_{13} = 41$ です。
$n = 2k \ (k \geqq 6)$ のとき $a_{2k} = 37 + 6(k-6) = 6k + 1 > 3 \cdot 2k$
$n = 2k+1 \ (k \geqq 6)$ のとき $a_{2k+1} = 41 + 6(k-6) = 6k + 5 > 3 \cdot (2k+1)$
よって $a_n > 3n \ (n \geqq 12)$ です。

以上より $p_n > 3n \ (n \geqq 12)$ が成り立ちます。