2024 **年新潟大学文系問題** *1*

座標平面の原点を O、直線 $L_1 : y = -2\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,,\ L_2 : y = \sqrt{3}\,x$ とします。
x 軸と L_1 との交点を A、L_1 と L_2 との交点を B とします。
三角形 OAB の内接円の中心点を求めてください。

解説・解答

内接円の半径を r、中心点を $I(s,t)$ と置きます。
I から OA, AB, BO に下した垂線の足をそれぞれ $P, Q.R$ と置きます。
$IP=IQ=IR=r$ です。

直線 L_1, L_2 をイメージまたは図示すると、A は x 軸上の正側、B は第一象限にあります。

$I(s,t)$ は x 軸の上側にあるので $t>0$ です。
$IP=|t|=t=r$ なので $I(s,r)$ です。

$I(s,r)$ は $L_2 : y=\sqrt{3}x$ の下側にあるので $r<\sqrt{3}s$ です。
$IR=\dfrac{|\sqrt{3}s-r|}{\sqrt{3+1}}=\dfrac{\sqrt{3}s-r}{2}=r$ より $s=\sqrt{3}r$ なので $I(\sqrt{3}r,r)$ です。

$I(\sqrt{3}r,r)$ は $L_1 : y=-2\sqrt{2}x+\sqrt{3}$ の下側にあるので $r<-2\sqrt{6}r+\sqrt{3}$ です。
$IQ=\dfrac{|-2\sqrt{6}r+\sqrt{3}-r|}{\sqrt{8+1}}=\dfrac{-2\sqrt{6}r+\sqrt{3}-r}{3}=r$ より $r=\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}$ です。

以上より、内接円の中心点は $\left(\dfrac{3\sqrt{6}-6}{4}, \dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}\right)$ です。