

2024年名古屋大学文系問題 1

$p^3 + q^3 = 50$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p < q$ を満たす実数の組 (p, q) を求めてください。

解説・解答

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ の両辺に pq を掛けると $p + q = pq$ です。
 $p + q = pq = x$ と置きます。

$$\begin{aligned} & p^3 + q^3 - 50 \\ &= (p + q)^3 - 3pq(p + q) - 50 \\ &= x^3 - 3x^2 - 50 \\ &= (x^3 - 3x^2 - 10x) + (10x - 50) \\ &= x(x + 2)(x - 5) + 10(x - 5) \\ &= \{x(x + 2) + 10\}(x - 5) \\ &= \{(x + 1)^2 + 9\}(x - 5) = 0 \\ &x = p + q = pq = 5 \text{ です。} \end{aligned}$$

p, q を解に持つ二次方程式 $t^2 - (p + q)t + pq = t^2 - 5t + 5 = 0$ を解いて $t = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ です。

以上より $(p, q) = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)$ です。