2024 年京都大学理系問題 4

自然数からなる数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ を次のように定めます。

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ がすべて奇数となる最小の a_0 を求めてください。

解説・解答

$a_0, a_1, a_2, \cdots$ がすべて奇数のときは $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 1}{2}$ です。
$a_{n+1} + 1 = \dfrac{3}{2}(a_n + 1)$ に式変形できるので $a_n + 1 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n (a_0 + 1)$ です。

a_{10} が奇数なので $a_{10} + 1$ は偶数です。
$a_{10} + 1 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10} (a_0 + 1)$ より $a_{10} + 1$ は 3^{10} の倍数です。
よって $a_{10} + 1 = 2 \cdot 3^{10} \cdot k$ (k は自然数) です。

$a_0 = \dfrac{2^{10}(a_{10} + 1)}{3^{10}} - 1 = \dfrac{2^{10} \cdot (2 \cdot 3^{10} \cdot k)}{3^{10}} - 1 = 2^{11} \cdot k - 1 \geqq 2^{11} \cdot 1 - 1 = 2047$ です。

$a_0 = 2047$ のとき
$a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n (a_0 + 1) - 1 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \cdot 2^{11} - 1 = 2^{11-n} \cdot 3^n - 1$ です。
$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ がすべて奇数になります。

以上より、条件を満たし最小なのは $a_0 = 2047$ です。