

2024 年関西大学理系問題 4

n は 6 以上の自然数です。

$\log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 \cdots \log_n(n+1)$ が自然数であるとき、 n を 4 で割った余りを求めてください。

解説・解答

m を自然数として $m = \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 \cdots \log_n(n+1)$ と置きます。
 n は 6 以上の自然数より $m \geq \log_6 7 > 1$ なので、 m は 2 以上の自然数です。

対数の底の変換公式 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ を使って底を 6 に揃えます。

$$\begin{aligned} m &= \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 \cdots \log_n(n+1) \\ &= \log_6 7 \cdot \frac{\log_6 8}{\log_6 7} \cdot \frac{\log_6 9}{\log_6 8} \cdots \frac{\log_6(n+1)}{\log_6 n} \\ &= \log_6(n+1) \end{aligned}$$

$m = \log_6(n+1)$ より $6^m = n+1$ なので
 $n = 6^m - 1 = 4 \cdot 9 \cdot 6^{m-2} - 1 = 4(9 \cdot 6^{m-2} - 1) + 3$ です。

以上より、 n を 4 で割った余りは 3 です。