2024 **年関西大学文系問題** *1*

x は実数です。
$AB = 2x+2$, $BC = 3x-2$, $CA = 5$, $\cos\angle CAB = \dfrac{3}{4}$ である三角形 ABC の外接円の半径 R と内接円の半径 r を求めてください。

解説・解答

余弦定理 $BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot AB \cos \angle CAB$ より

$$\cos \angle CAB = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} = \frac{5^2 + (2x+2)^2 - (3x-2)^2}{2 \cdot 5(2x+2)} = \frac{5-x}{4} = \frac{3}{4}$$

よって $x = 2$ なので $(AB, BC, CA) = (6, 4, 5)$ です。

$$\sin \angle CAB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CAB} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

正弦定理 $\dfrac{BC}{\sin \angle CAB} = 2R$ より $R = \dfrac{BC}{2 \sin \angle CAB} = \dfrac{4}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = \dfrac{8}{\sqrt{7}}$ です。

(三角形 ABC の面積) $= \dfrac{CA \cdot AB \sin \angle CAB}{2} = \dfrac{(AB + BC + CA)r}{2}$ より

$$r = \frac{CA \cdot AB \sin \angle CAB}{(AB + BC + CA)r} = \frac{5 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}}{6 + 4 + 5} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$ です。

以上より $(R, r) = \left(\dfrac{8}{\sqrt{7}}, \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$ です。