

2024 年関西学院大学理系問題 2

$\cos^2 \frac{\pi}{10}$  の値を求めてください。

## 解説・解答

$\theta = \frac{\pi}{10}$  と置けば  $\cos 5\theta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$  です。

加法定理、二倍角公式、三倍角公式を使い  $\cos 5\theta$  を  $\cos \theta$  で表します。

$$\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos(3\theta + 2\theta) \\ &= \cos 3\theta \cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta \\ &= (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (3\sin \theta - 4\sin^3 \theta)(2\sin \theta \cos \theta) \\ &= (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta)(2\cos^2 \theta - 1) - 2(4\cos^2 \theta - 1)(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\ &= 16\cos^5 \theta - 20\cos^3 \theta + 5\cos \theta \\ &= (16\cos^4 \theta - 20\cos^2 \theta + 5) \cos \theta\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} < \cos \theta < \cos 0 = 1$$

$\cos \theta \neq 0$  なので  $16\cos^4 \theta - 20\cos^2 \theta + 5 = 0$  です。

二次方程式の解の公式を使い  $\cos^2 \theta = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$  です。

$$\cos^2 \frac{\pi}{10} > \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{6}{8} > \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \text{ なので } \cos^2 \frac{\pi}{10} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \text{ です。}$$