

2024 年関西学院大学理系問題 2

$\cos^2 \frac{\pi}{10}$ の値を求めてください。

解説・解答

$\theta = \frac{\pi}{10}$ と置けば $\cos 5\theta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ です。

加法定理、二倍角公式、三倍角公式を使い $\cos 5\theta$ を $\cos \theta$ で表します。

$$\cos 5\theta = \cos(3\theta + 2\theta)$$

$$\begin{aligned}&= \cos 3\theta \cos 2\theta - \sin 3\theta \sin 2\theta \\&= (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta)(2 \sin \theta \cos \theta) \\&= (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)(2 \cos^2 \theta - 1) - 2(4 \cos^2 \theta - 1)(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\&= 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta \\&= (16 \cos^4 \theta - 20 \cos^2 \theta + 5) \cos \theta\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} < \cos \theta < \cos 0 = 1$$

$\cos \theta \neq 0$ ので $16 \cos^4 \theta - 20 \cos^2 \theta + 5 = 0$ です。

二次方程式の解の公式を使い $\cos^2 \theta = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$ です。

$\cos^2 \frac{\pi}{10} > \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{6}{8} > \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ ので $\cos^2 \frac{\pi}{10} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$ です。