2024 **年関西学院大学理系問題** *2*

半径 1 の円に外接する正 24 角形の面積を求めてください。

解説・解答

加法定理を使います。

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

二倍角公式 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$, $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ を使います。

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin 2\theta}=\dfrac{2\sin^2\theta}{\sin 2\theta}=\dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ です。

$$\tan\frac{\pi}{24}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-2$$

半径 1 の円の中心を O とし、正 24 角形の一辺を AB とし、AB の中点を M とします。

$OM=1$, $\angle AOB=\dfrac{\pi}{12}$, $\angle AOM=\dfrac{\pi}{24}$, $\angle AMO=\dfrac{\pi}{2}$ です。

$$AB=2\cdot AM=2\cdot OM\tan\angle AOM=2\tan\frac{\pi}{24}=2(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-2)$$

$$\triangle OAB=\frac{AB\cdot OM}{2}=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-2$$

(正 24 角形の面積) $=24\cdot\triangle OAB=24\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-2\right)$ です。