

2024 年関西学院大学理系問題 3

座標空間に 5 点 O, A, B, C, D があり $|\overrightarrow{OA}| = 1$, $|\overrightarrow{OB}| = 2$, $|\overrightarrow{OC}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$,
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 6\overrightarrow{OC}}{6}$ です。
四面体 $OABD$ の体積を求めてください。

解説・解答

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 = 1^2 - 0 + 2^2 = 5$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \frac{2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 6\overrightarrow{OC}}{6} - \overrightarrow{OA} = \frac{-4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 6\overrightarrow{OC}}{6}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AD}|^2 &= \left| \frac{-4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 6\overrightarrow{OC}}{6} \right|^2 \\ &= \frac{16|\overrightarrow{OA}|^2 + 9|\overrightarrow{OB}|^2 + 36|\overrightarrow{OC}|^2 - 24\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 36\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 48\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{36} \\ &= \frac{16 + 36 + 8 - 0 - 24 + 0}{36} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot \frac{-4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - 6\overrightarrow{OC}}{6} \\ &= \frac{4|\overrightarrow{OA}|^2 + 3|\overrightarrow{OB}|^2 - 7\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 6\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 6\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{6} \\ &= \frac{4 + 12 - 0 - 4 + 0}{6} = 2 \end{aligned}$$

$$(\text{三角形 } ABD \text{ の面積}) = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AD}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})^2}}{2} = \frac{\sqrt{5-4}}{2} = \frac{1}{2} \text{ です。}$$

O から平面 ABD に下した垂線の足を H と置けば $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD}$ と表せます。

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} + s|\overrightarrow{AB}|^2 + t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5s + 2t - 1 = 0$$

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AD} + s\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + t|\overrightarrow{AD}|^2 = 2s + t - \frac{2}{3} = 0$$

よって $(s, t) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ なので $\overrightarrow{AH} = \frac{-\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}}{3}$ です。

$$|\overrightarrow{AH}|^2 = \left| \frac{-\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}}{3} \right|^2 = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 - 8\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 16|\overrightarrow{AD}|^2}{9} = \frac{5}{9}$$

三角形 $OA H$ は直角三角形なので $|\overrightarrow{OH}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{AH}|^2} = \frac{2}{3}$ です。

$$(\text{四面体 } OABD \text{ の体積}) = \frac{1}{3} \cdot (\text{三角形 } ABD \text{ の面積}) \cdot |\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \text{ です。}$$