2024 **年関西学院大学文系問題** *2*

a は整数です。
x についての方程式 $x^3-(a-3)x^2-(2a-1)x+3a+3=0$ を考えます。
この方程式が虚数解 $x=\alpha,\beta$ を持つとき、
$\alpha^2+\beta^2$ の最大値・最小値とそのときの a の値を求めてください。

解説・解答

次数の低い文字で整理して因数分解します。

$$\begin{aligned}
&\quad x^3-(a-3)x^2-(2a-1)x+3a+3 \\
&=-(x^2+2x-3)a+(x^3+3x^2+x+3) \\
&=-(x+3)(x-1)a+(x+3)(x^2+1) \\
&=(x+3)\{-(x-1)a+(x^2+1)\} \\
&=(x+3)(x^2-ax+a+1)
\end{aligned}$$

$(x+3)(x^2-ax+a+1)=0$ が虚数解 $x=\alpha,\beta$ を持つので
$x^2-ax+a+1=0$ の解が虚数 α,β です。

判別式 $D=a^2-4(a+1)=a^2-4a-4<0$ より
$2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$ なので $a=0,1,2,3,4$ です。

解と係数の関係より $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=a+1$ です。
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=a^2-2(a+1)=a^2-2a-2=(a-1)^2-3$

以上より $\alpha^2+\beta^2$ の最大値・最小値は
$a=4$ のとき最大値 $(4-1)^2-3=6$, $a=1$ のとき最小値 $(1-1)^2-3=-3$ です。