$\mathit{2023}$ **年関西学院大学文系問題** $\mathit{1}$

$OA=OB=OC=AB=3$, $AC=5$, $\cos\angle BAC=\dfrac{1}{3}$ とします。
四面体 $OABC$ の体積を求めてください。

解説・解答

$\cos\angle BAC = \dfrac{1}{3}$ より $\sin\angle BAC = \sqrt{1-\cos^2\angle BAC} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ です。

(三角形 ABC の面積) $= \dfrac{AB\cdot AC\sin\angle BAC}{2} = \dfrac{3\cdot 5\cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = 5\sqrt{2}$ です。

三角形 ABC で余弦定理を使い BC を求め、正弦定理を使い外接の半径 R を求めます。

$BC = \sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC} = \sqrt{3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot \dfrac{1}{3}} = 2\sqrt{6}$

$R = \dfrac{BC}{2\sin\angle BAC} = \dfrac{2\sqrt{6}}{2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

O から平面 ABC に下した垂線の足を H と置きます。

$OA=OB=OC=3,\ OH$ が共通なので直角三角形 OAH, OBH, OCH は合同です。

よって $AH=BH=CH=R$ です。

ゆえに $OH=\sqrt{OA^2-AH^2} = \sqrt{3^2-\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}$ です。

(四面体 $OABC$ の体積) $= \dfrac{(\text{三角形 } ABC \text{ の面積})\cdot OH}{3} = \dfrac{5\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}}{3} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ です。