2024 **年慶應義塾大学薬学部問題** *1*

a, b は自然数、p は素数です。
$a^4 - 4a^2b + 4b^3 - b^4 = p^2$ を満たす組 (a, b, p) を求めてください。

解説・解答

$$
\begin{aligned}
p^2 &= a^4 - 4a^2b + 4b^3 - b^4 \\
&= (a^4 - 4a^2b + 4b^2) - (b^4 - 4b^3 + 4b^2) \\
&= (a^2 - 2b)^2 - (b^2 - 2b)^2 \\
&= \{(a^2 - 2b) - (b^2 - 2b)\}\{(a^2 - 2b) + (b^2 - 2b)\} \\
&= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 4b) \\
&= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2 - 4b)
\end{aligned}
$$

$a-b$，$a+b$，a^2+b^2-4b は p^2 の約数です。
a,b は自然数、p は素数なので $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$p \geqq 2$ です。
$a+b \geqq 2$ なので $a+b=p, p^2$ です。
$-a-b < a-b < a+b$ より $-2 < a-b < 2$ なので $a-b=\pm 1$ です。
よって $(a-b,\ a+b,\ a^2+b^2-4b) = (-1,p,-p), (-1,p^2,-1), (1,p,p), (1,p^2,1)$ です。

$(a-b,\ a+b,\ a^2+b^2-4b) = (-1,p,-p)$ のとき
$a=b-1$，　$p=a+b=2b-1$
$a^2+b^2-4b+p=(b-1)^2+b^2-4b+(2b-1)=2b(b-2)=0$
よって $b=2$ なので $a=2-1=1$，$p=2\cdot 2-1=3$ です。

$(a-b,\ a+b,\ a^2+b^2-4b) = (-1,p^2,-1)$ のとき
$a=b-1$ なので $a^2+b^2-4b+1=(b-1)^2+b^2-4b+1=2(b^2-3b+1)=0$
よって、条件を満たす自然数 b はありません。

$(a-b,\ a+b,\ a^2+b^2-4b) = (1,p,p)$ のとき
$a=b+1$，　$p=a+b=2b+1$
$a^2+b^2-4b-p=(b+1)^2+b^2-4b-(2b+1)=2b(b-2)=0$
よって $b=2$ なので $a=2+1=3$，$p=2\cdot 2+1=5$ です。

$(a-b,\ a+b,\ a^2+b^2-4b) = (1,p^2,1)$ のとき
$a=b+1$ なので $a^2+b^2-4b+1=(b+1)^2+b^2-4b-1=2b(b-1)=0$
よって $b=1$，$a=1+1=2$，$p^2=2+1=3$ なので条件を満たす素数 p はありません。

以上より $(a,b,p)=(1,2,3),(3,2,5)$ です。