2024 **年慶應義塾大学経済学部問題** *1*

$f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ の最小値を求めてください。

解説・解答

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2+3x+5}{x^2+1} \\
&= \frac{3x+4}{x^2+1}+1 \\
&= \frac{3\tan\theta+4}{\tan^2\theta+1}+1 \qquad \left(x=\tan\theta\,,\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right) \\
&= (3\tan\theta+4)\cos^2\theta+1 \\
&= 3\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta+1 \\
&= \frac{3}{2}\sin 2\theta+2\cos 2\theta+3 \\
&= \frac{5}{2}\sin\big(2\theta+\alpha\big)+3 \qquad \left(\sin\alpha=\frac{3}{5}\,,\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\,,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{2}+\alpha < 0\,,\quad -\dfrac{\pi}{2}+\alpha \leqq 2\theta+\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}+\alpha\,,\quad \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2}+\alpha < \pi$ なので

$2\theta+\alpha=-\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ のときに $\sin\big(2\theta+\alpha\big)$ は最小になります。

このとき $\theta=-\dfrac{\pi}{4}\,,\ x=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ です。

以上より、最小値は $f(-1)=\dfrac{1-3+5}{1+1}=\dfrac{3}{2}$ です。