2024 **年慶應義塾大学環境情報学部問題** *1*

x, y, z は 1 より大きな実数です。
次の 2 つの式を満たす組 (x, y, z) を求めてください。
$\log_x y + \log_y xz + \log_z y^4 \leqq 6$
$4xz + 3x - 7y - 5z + 5 = 0$

解説・解答

x, y, z が 1 より大きいので $\log_{10} x,\ \log_{10} y,\ \log_{10} z$ は 0 より大きいです。

対数の底の変換公式を使い、相加平均・相乗平均の関係を使います。

$$
\begin{aligned}
6 &\geqq \log_x y + \log_y xz + \log_z y^4 \\
&= \log_x y + \log_y x + \log_y z + 4\log_z y \\
&= \frac{\log_{10} y}{\log_{10} x} + \frac{\log_{10} x}{\log_{10} y} + \frac{\log_{10} z}{\log_{10} y} + \frac{4\log_{10} y}{\log_{10} z} \\
&\geqq 2\sqrt{\frac{\log_{10} y}{\log_{10} x} \cdot \frac{\log_{10} x}{\log_{10} y}} + 2\sqrt{\frac{\log_{10} z}{\log_{10} y} \cdot \frac{4\log_{10} y}{\log_{10} z}} \quad (x = y,\ z = y^2 \text{のとき等号成立}) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

よって $\log_x y + \log_y xz + \log_z y^4 = 6$, $x = y$, $z = y^2$ です。

$4xz + 3x - 7y - 5z + 5 = 4y \cdot y^2 + 3y - 7y - 5y^2 + 5 = (4y-5)(y^2-1) = 0$

$y > 1$ なので $y = \dfrac{5}{4}$ です。

以上より $(x, y, z) = \left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{25}{16}\right)$ です。