2024 年慶應義塾大学医学部問題 *1*

第 1 象限の点 P で楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ と接する直線を l とします。
直線 l と x 軸 , y 軸で囲まれた三角形の面積を S とします。
S の最小値を求めてください。

解説・解答

第 1 象限の点なので $P(s,t)\ (s>0, t>0)$ と置きます。
楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点でもあるので $\dfrac{s^2}{3}+\dfrac{t^2}{2}=1$ です。

相加平均・相乗平均の関係より $1=\dfrac{s^2}{3}+\dfrac{t^2}{2} \geqq 2\sqrt{\dfrac{s^2}{3}\cdot\dfrac{t^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}\,st}{3}$ なので
$0<st\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{2}\quad\left\{(s,t)=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},1\right)\text{で等号成立}\right\}$ です。

直線 l は点 $P(s,t)$ で楕円 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ と接するので
楕円の接線の公式を使い、直線 l の方程式は $\dfrac{sx}{3}+\dfrac{ty}{2}=1$ です。

直線 l と x 軸 , y 軸との交点はそれぞれ $\left(\dfrac{3}{s},0\right),\left(0,\dfrac{2}{t}\right)$ です。
直線 l と x 軸 , y 軸で囲まれた三角形の面積は $S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{s}\cdot\dfrac{2}{t}=\dfrac{3}{st}\geqq\dfrac{3}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{6}$ です。

以上より $P\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},1\right)$ のときに最小値 $S=\sqrt{6}$ です。