

2024 年慶應義塾大学商学部問題 1

$a < b < c$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 2$ を満たす自然数の組 (a, b, c) を求めてください。

解説・解答

$a = 1$ のとき

$1 + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 2$ は $(b-2)(c-3) = 6$ に式変形できます。

$1 < b < c$ より $0 \leq b-2 \leq c-3$ です。

$(b-2, c-3) = (1, 6), (2, 3)$ なので $(b, c) = (3, 9), (4, 6)$ です。

$a = 2$ のとき

$\frac{1}{2} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 2$ は $(3b-4)(c-2) = 6$ に式変形できます。

$2 < b < c$ より $3b-4 \geq 5, c-2 \geq 2$ なので $(3b-4)(c-2) \geq 10$ です。

よって、条件を満たす (b, c) はありません。

$a \geq 3$ のとき

$3 \leq a < b < c$ より $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} = \frac{43}{30} < 2$ です。

よって、条件を満たす (a, b, c) はありません。

以上より $(a, b, c) = (1, 3, 9), (1, 4, 6)$ です。