

2024 年一橋大学問題 3

$f(x)$ は 4 次の係数が 1 である 4 次多項式です。

$f(x)$ を $(x + 1)^2$ で割ると 1 余り、 $(x - 1)^2$ で割ると 2 余ります。

$f(x)$ を求めてください。

解説・解答

4次の係数が1で、 $(x+1)^2$ で割ると1余る4次多項式なので
実数 a, b を用いて $f(x) = (x+1)^2(x^2 + ax + b) + 1$ と置けます。

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+1)^2(x^2 + ax + b) + 1 \\&= \{(x-1)^2 + 4x\}\{(x-1)^2 + 2x - 1 + ax + b\} + 1 \\&= (x-1)^2g(x) + 4x(2x-1+ax+b) + 1 \quad \{g(x) \text{ は } 2 \text{ 次多項式}\} \\&= (x-1)^2g(x) + (4a+8)x^2 + (4b-4)x + 1\end{aligned}$$

$(x-1)^2$ で割ると2余るので

$(4a+8)x^2 + (4b-4)x + 1 = (4a+8)(x-1)^2 + 2 = (4a+8)x^2 - (8a+16)x + 4a + 10$ です。
係数を比べると $1 = 4a + 10$, $4b - 4 = -8a - 16$ なので $a = -\frac{9}{4}$, $b = \frac{3}{2}$ です。

以上より $f(x) = (x+1)^2\left(x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{2}\right) + 1 = x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ です。