2024 **年一橋大学問題** *1*

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k(n-2k) = 2024$ を満たす自然数の組 (m, n) 求めてください。

解説・解答

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} k(n-2k) &= n\sum_{k=1}^{m} k - 2\sum_{k=1}^{m} k^2 \\
&= \frac{n\,m(m+1)}{2} - \frac{2\,m(m+1)(2m+1)}{6} \\
&= \frac{m(m+1)(3n-4m-2)}{6}
\end{aligned}
$$

$2024\cdot 6 = 2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ なので $m(m+1)(3n-4m-2) = 2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ です。
$m. m+1$ は連続した自然数で、$m(m+1)$ が $2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ の約数です。
$m,\, m+1$ の一方は奇数なので $1, 3, 11, 23, 33, 69, 253, 759$ の前後を調べると
$(m,\, m+1) = (1,2), (2,3), (3,4), (11,12), (22,23), (23,24)$ です。

$(m,\, m+1) = (1,\, 2)$ のとき
$3n-4m-2 = 2^3\cdot 3\cdot 11\cdot 23 = 6072$ なので $n = 2026$ です。

$(m,\, m+1) = (2,\, 3)$ のとき
$3n-4m-2 = 2^3\cdot 11\cdot 23 = 2024$ なので $n = 678$ です。

$(m,\, m+1) = (3,\, 4)$ のとき
$3n-4m-2 = 2^2\cdot 11\cdot 23 = 1012$ なので $n = 342$ です。

$(m,\, m+1) = (11,\, 12)$ のとき
$3n-4m-2 = 2^2\cdot 23 = 92$ なので $n = 46$ です。

$(m,\, m+1) = (22,\, 23)$ のとき
$3n-4m-2 = 2^3\cdot 3 = 24$ なので $n = 38$ です。

$(m,\, m+1) = (23,\, 24)$ のとき
$3n-4m-2 = 2\cdot 11 = 22$ なので条件を満たす自然数 n はありません。

以上より $(m,\, n) = (1,\, 2026), (2,\, 678), (3,\, 342), (11,\, 46), (22, 38)$ です。