

2024年浜松医科大学問題 1

鋭角三角形の3つの内角を A, B, C とします。

$\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C}$ の最小値とそのときの三角形を求めてください。

解説・解答

A, B, C は鋭角三角形の内角なので $\tan A, \tan B, \tan C$ は正の実数です。

$$\tan A = \tan\{\pi - (B + C)\} = -\tan(B + C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}$$

分母を払って整理して $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ です。

両辺を $\tan A \tan B \tan C$ で割り $a = \frac{1}{\tan A}, b = \frac{1}{\tan B}, c = \frac{1}{\tan C}$ と置きます。

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \tan B \tan C} = \frac{1}{\tan A \tan B} + \frac{1}{\tan B \tan C} + \frac{1}{\tan C \tan A} = ab + bc + ca = 1$$

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &= \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2} + 3(ab + bc + ca) \\ &= \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2} + 3 \\ &\geq 3 \quad (a = b = c のとき等号成立) \end{aligned}$$

$a = b = c$ のとき $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ なので正三角形です。

以上より、正三角形のときに最小値 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = \sqrt{3}$ です。