

2023年早稲田大学社会科学部問題 2

$xyz + x + y + z = xy + yz + zx + 5$ を満たす整数の組 (x, y, z) を求めてください。
ただし $x \leq y \leq z$ とします。

解説・解答

左辺にまとめて x で整理し、その後に y で整理します。

$$\begin{aligned} & xyz + x + y + z - (xy + yz + zx + 5) \\ &= (yz - y - z + 1)x - (yz - y - z + 1) - 4 \\ &= (x - 1)(yz - y - z + 1) - 4 \\ &= (x - 1)\{(z - 1)y - (z - 1)\} - 4 \\ &= (x - 1)(y - 1)(z - 1) - 4 = 0 \end{aligned}$$

$(x - 1)(y - 1)(z - 1) = 4$ なので、 $x \leq y \leq z$ を考慮して、

$$(x - 1, y - 1, z - 1) = (-4, -1, 1), (-2, -2, 1), (-2, -1, 2), (-1, -1, 4), (1, 1, 4), (1, 2, 2)$$

以上より $(x, y, z) = (-3, 0, 2), (-1, -1, 2), (-1, 0, 3), (0, 0, 5), (2, 2, 5), (2, 3, 3)$ です。