2023 **年早稲田大学理工学部問題** *1*

整式 $(3x+2)^n$ を x^2+x+1 で割った余りを a_nx+b_n と置きます。
全ての自然数 n に対して a_n と b_n は互いに素な整数であることを示してください。

解説・解答

整式 $(3x+2)^n$ を x^2+x+1 で割った商を Q_n とします。
$(3x+2)^n=(x^2+x+1)Q_n+a_nx+b_n$ です。

$n=1$ のとき $3x+2=(x^2+x+1)Q_1+a_1x+b_1$ より $a_1=3$, $b_1=2$ です。

$$\begin{aligned}(3x+2)^{n+1}&=\{(x^2+x+1)Q_n+a_nx+b_n\}(3x+2)\\&=(x^2+x+1)\{(3x+2)Q_n+3a_n\}+(3b_n-a_n)x+(2b_n-3a_n)\end{aligned}$$
よって $a_{n+1}=3b_n-a_n$, $b_{n+1}=2b_n-3a_n$ です。
連立して a_n,b_n について解けば $a_n=\dfrac{2a_{n+1}-3b_{n+1}}{7}$, $b_n=\dfrac{3a_{n+1}-b_{n+1}}{7}$ です。

a_n,b_n の最初の数項を計算します。
a_n は $3,\ 3,\ -18=-3\cdot7+3,\ \cdots$ なので $(7$ の倍数$)+3$ と推測できます。
b_n は $2,\ -5=-1\cdot7+2,\ -19=-3\cdot7+2,\ \cdots$ なので $(7$ の倍数$)+2$ と推測できます。

自然数 k で $a_k=7a+3$, $b_k=7b+2$ $(a,b$ は整数$)$ なら
$a_{k+1}=3b_k-a_k=7(3b-a)+3$, $b_{k+1}=2b_k-3a_k=7(2b-3a-1)+2$ なので
数学的帰納法により全ての自然数 n で $a_n=(7$ の倍数$)+3$, $b_n=(7$ の倍数$)+2$ です。
よって a_n も ,b_n も 7 の倍数ではない整数です。

自然数 k で $a_k=ag$, $b_k=bg$ $(a,b$ は整数$,g$ は 7 の倍数でない 2 以上の整数$)$ なら
$a_{k-1}=\dfrac{2a_k-3b_k}{7}=\dfrac{(2a-3b)g}{7}$, $b_{k-1}=\dfrac{3a_k-b_k}{7}=\dfrac{(3a-b)g}{7}$ なので
k 以下の自然数 m で a_m と b_m は共に約数 g を持ちます。
しかし、$a_1=3$ と $b_1=2$ は互いに素な整数です。
よって、背理法により、全ての自然数 n で a_n と b_n は互いに素な整数です。