2023 年早稲田大学商学部問題 *3*

n は正の整数です。
n^2+n+1 が 91 で割り切れるような n を小さい順に並べるとき、
100 番目の整数 n を求めてください。

解説・解答

$91=7\cdot 13$ なので、7 で割り切れ、かつ 13 でも割り切れるものを調べれば良いです。
$a_n=n^2+n+1=n(n+1)+1$ と置きます。

n を 7 で割った商を q, 余りを r とします。$n=7q+r\ (r=0,1,2,\cdots,6)$
$a_{7q+r}=(7q+r)^2+(7q+r)+1=(7\text{ の倍数})+a_r$ です。
$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ を 7 で割った余りは順に $3,0,6,0,3,1,1$ です。
よって $n=7q+2\,,\ 7q+4$ のときに a_n は 7 で割り切れます。

n を 13 で割った商を s, 余りを t とします。$n=13s+t\ (t=0,1,2,\cdots,12)$
$a_{13s+t}=(13s+t)^2+(13s+t)+1=(13\text{ の倍数})+a_t$ です。
$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{13}$ を 13 で割った余りは順に $3,7,0,8,5,4,5,8,0,7,3,1,1$ です。
よって $n=13s+3\,,\ 13s+9$ のときに a_n は 13 で割り切れます。

$n=7q+2=13s+9$ のとき $n=91k+9\ (k=0,1,2,\cdots)$ です。
$n=7q+2=13s+3$ のとき $n=91k+16\ (k=0,1,2,\cdots)$ です。
$n=7q+4=13s+9$ のとき $n=91k+74\ (k=0,1,2,\cdots)$ です。
$n=7q+4=13s+3$ のとき $n=91k+81\ (k=0,1,2,\cdots)$ です。
よって $n=91k+9\,,\ 91k+16\,,\ 91k+74\,,\ 91k+81$ のときに a_n は 91 で割り切れます。

以上より 100 番目は $n=91\cdot(100\div 4-1)+81=2265$ です。