2023 **年東京大学理系問題** 5

整式 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$, $h(x)=x^2+ax+b$ とし、
$\{h(x)\}^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ と置き、
$\{h_1(x)\}^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ と置きます。
$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような実数の組 (a,b) を求めてください。

解説・解答

$f(x)=(x-1)^2(x-2)$ より $f(1)=0$, $f'(1)=0$, $f(2)=0$ です。

$Q_1(x),Q_2(x),Q_3(x)$ を整式として、
$\{h(x)\}^7=f(x)\cdot Q_1(x)+h_1(x)$, $\{h_1(x)\}^7=f(x)\cdot Q_2(x)+h_2(x)$ と置けて、
$\{h_1(x)\}^7=\left\{\{h(x)\}^7-f(x)\cdot Q_1(x)\right\}^7=\{h(x)\}^{49}-f(x)\cdot Q_3(x)$ と置けます。

$Q_2(x)+Q_3(x)=Q_4(x)$ と置きます。
$\{h(x)\}^{49}-f(x)\cdot Q_3(x)=f(x)\cdot Q_2(x)+h_2(x)$ と $h_2(x)=h(x)$ より
$\left\{\{h(x)\}^{48}-1\right\}\cdot h(x)=f(x)\cdot\{Q_2(x)+Q_3(x)\}=f(x)\cdot Q_4(x)$ です。
微分して $\left\{49\{h(x)\}^{48}-1\right\}\cdot h'(x)=f'(x)\cdot Q_4(x)+f(x)\cdot Q_4'(x)$ です。

$\left\{\{h(1)\}^{48}-1\right\}\cdot h(1)=f(1)\cdot Q_4(1)=0$ より
$h(1)=1+a+b=0,\pm1$ です。

$\left\{49\{h(1)\}^{48}-1\right\}\cdot h'(1)=f'(1)\cdot Q_4(1)+f(1)\cdot Q_4'(1)=0$ より
$h'(1)=2+a=0$ です。

$\left\{\{h(2)\}^{48}-1\right\}\cdot h(2)=f(2)\cdot Q_4(2)=0$ より
$h(2)=4+2a+b=0,\pm1$ です。

$1+a+b=0,\pm1$, $\quad 2+a=0$, $\quad 4+2a+b=0,\pm1$ を連立して解いて
$(a,b)=(-2,0),(-2,1))$ です。