2023 **年東京大学文系問題** 4

半径 1 の球面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり
$AB=1$, $AC=BC$, $AD=BD$, $\cos\angle ACB = \cos\angle ADB = \dfrac{4}{5}$ を満たしています。
四面体 $ABCD$ の体積 V を求めてください。

解説・解答

$AC = BC$, $AD = BD$ より三角形 ABC と三角形 ABD は二等辺三角形です。
底辺 AB が共通で頂角が等しいので三角形 ABC と三角形 ABD は合同です。
$\cos\angle ACB = \cos\angle ADB = \dfrac{4}{5}$,　$\sin\angle ACB = \sin\angle ADB = \dfrac{3}{5}$ です。

$x = AC = BC = AD = BD$ と置きます。
三角形 ABC に余弦定理 $AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos\angle ACB = AB^2$ を使います。
$x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cdot \dfrac{4}{5} = 1$ より $x = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ です。
$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \sin\angle ACB = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^2 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{4}$ です。

半径 1 の球の中心点を P と置き、AB, CD の中点をそれぞれ M, N と置きます。
三角形 ABC と三角形 ABD が合同より $CM = DM$ なので三角形 CMD は二等辺三角形
よって、M から CD に下した垂線の足は N です。
AB, CD それぞれの垂直二等分面上に P があるので、MN 上に P があります。

半径 1 の球面上の点なので $PA = PB = PC = PD = 1$ です。
三角形 PAB は一辺の長さ 1 の正三角形なので $PM = 1 \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ です。
直角三角形 ADM で $DM = \sqrt{AD^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{3}{2}$ です。

三角形 PDM に余弦定理 $PM^2 + DM^2 - 2PM \cdot DM \cos\angle PMD = PD^2$ を使います。
$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \cos\angle PMD = 1^2$ より $\cos\angle PMD = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$ です。
$\sin\angle PMD = \sqrt{1 - \cos^2\angle PMD} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}$ です。
$\sin\angle CMD = \sin(2\angle PMD) = 2\sin\angle PMD \cos\angle PMD = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}} \cdot \dfrac{4}{3\sqrt{3}} = \dfrac{8\sqrt{11}}{27}$ です。

D から三角形 ABC に下した垂線の足を H と置きます。
$DH = DM \sin\angle CMD = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{8\sqrt{11}}{27} = \dfrac{4\sqrt{11}}{9}$ です。

以上より $V = \dfrac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot DH = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4\sqrt{11}}{9} = \dfrac{\sqrt{11}}{9}$ です。