

2023年東京大学文系問題 3

袋に玉が12個(黒玉3個,赤玉4個,白玉5個)入っています。

この袋から玉を1個ずつ取り出し、取り出した順に横一列に12個すべて並べます。

どの赤玉も隣り合わないとき、どの黒玉も隣り合わない条件付き確率を求めてください。

解説・解答

8ヶ所から3ヶ所を選んで黒玉を置き、残り5ヶ所に白玉を置きます。
その間と両端の9ヶ所から4ヶ所を選んで赤玉を1個ずつ入れます。
どの赤玉も隣り合わない並べ方は ${}_8C_3 \cdot {}_9C_4 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ 通りです。

白玉5個を並べ、その間と両端の6ヶ所から3ヶ所を選んで黒玉を1個ずつ入れます。
その間と両端の9ヶ所から4ヶ所を選んで赤玉を1個ずつ入れます。
並べ方は ${}_6C_3 \cdot {}_9C_4 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 通りです。

黒赤黒と並んだ3個の玉を一つのものと考えて A とします。
白玉5個を並べ、その間と両端の6ヶ所から2ヶ所を選んで黒玉1個と A を入れます。
その間と両端の8ヶ所から3ヶ所を選んで赤玉を1個ずつ入れます。
並べ方は ${}_6P_2 \cdot {}_8C_3 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ 通りです。

黒赤黒赤黒と並んだ5個の玉を一つのものと考えて B とします。
白玉5個を並べ、その間と両端の6ヶ所から1ヶ所を選んで B を入れます。
その間と両端の7ヶ所から2ヶ所を選んで赤玉を1個ずつ入れます。
並べ方は ${}_6C_1 \cdot {}_7C_2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ 通りです。

どの赤玉も隣り合わないかつどの黒玉も隣り合わない並べ方は
 $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 + 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 103$ 通りです。

以上より、求める確率は $\frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 103}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = \frac{103}{168}$ です。