2023 年東京大学文系問題 *1*

2 次方程式 $x^2+x-k=0$ の 2 つの実数解を α, β とします。
k が $k>2$ の範囲を動くとき $\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$ の最小値を求めてください。

解説・解答

判別式 $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) = 1 + 4k$ なので $k > 2$ では実数解を持ちます。
解と係数の関係より $\alpha + \beta = -1,\ \alpha\beta = -k$ です。

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \cdot (-k) = 2k + 1$
$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha + \beta) = (-1) \cdot (2k + 1) - (-k) \cdot (-1) = -3k - 1$
$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha + \beta)(\alpha^3 + \beta^3) - \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = (-1) \cdot (-3k - 1) - (-k) \cdot (2k + 1) = 2k^2 + 4k + 1$

$$\frac{\alpha^3}{1-\beta} + \frac{\beta^3}{1-\alpha}$$
$$= \frac{(1-\alpha)\alpha^3 + (1-\beta)\beta^3}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$
$$= \frac{(\alpha^3 + \beta^3) - (\alpha^4 + \beta^4)}{1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta}$$
$$= \frac{(-3k - 1) - (2k^2 + 4k + 1)}{1 - (-1) + (-k)}$$
$$= \frac{2k^2 + 7k + 2}{k - 2}$$
$$= 2(k-2) + 15 + \frac{24}{k-2} \qquad \text{(相加平均・相乗平均の関係を使う)}$$
$$\geqq 15 + 2\sqrt{2(k-2) \cdot \frac{24}{k-2}} \qquad (k = 2 + 2\sqrt{3}\text{で等号成立})$$
$$= 15 + 8\sqrt{3}$$

以上より $k = 2 + 2\sqrt{3}$ のときに最小値 $15 + 8\sqrt{3}$ です。