

2023年東京工業大学問題 2

$(x^3 - x)^2(y^3 - y) = 86400$ を満たす整数の組 (x, y) 求めてください。

解説・解答

$(x^3 - x)^2(y^3 - y) = 86400$ の左辺を因数分解、右辺を素因数分解します。

$$(x - 1)^2 x^2 (x + 1)^2 (y - 1)y(y + 1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$|x| \leqq 1$ では左辺が 0 になってしまふので $|x| \geqq 2$ です。

$y \leqq 1$ では左辺が 0 以下になつてしまふので $y \geqq 2$ です。

$|x| = 2$ のとき $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot (y - 1)y(y + 1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

$$(y - 1)y(y + 1) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2400$$
 です。

$12 \cdot 13 \cdot 14 = 2184$, $13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730$ なので条件を満たす整数 y はありません。

$|x| = 3$ のとき $2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot (y - 1)y(y + 1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

$$(y - 1)y(y + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$$
 です。

$4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$, $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ なので条件を満たす整数 y はありません。

$|x| = 4$ のとき $3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot (y - 1)y(y + 1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

$$(y - 1)y(y + 1) = 2^3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$
 より $y = 3$ です。

$|x| = 5$ のとき $4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot (y - 1)y(y + 1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

$$(y - 1)y(y + 1) = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
 より $y = 2$ です。

$|x| \geqq 6$ のとき

$$(x - 1)^2 x^2 (x + 1)^2 (y - 1)y(y + 1) \geqq 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 264600 > 86400$$
 です。

よつて、条件を満たす整数 y はありません。

以上より $(x, y) = (\pm 4, 3), (\pm 5, 2)$ です。