

2023年東京工業大学問題 2

$(x^3 - x)^2(y^3 - y) = 86400$ を満たす整数の組 (x, y) 求めてください。

解説・解答

$(x^3 - x)^2(y^3 - y) = 86400$ の左辺を因数分解、右辺を素因数分解します。

$$(x-1)^2 x^2 (x+1)^2 (y-1)y(y+1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$|x| \leq 1$ では左辺が 0 になってしまうので $|x| \geq 2$ です。

$y \leq 1$ では左辺が 0 以下になってしまうので $y \geq 2$ です。

$$|x| = 2 \text{ のとき } 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot (y-1)y(y+1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$$(y-1)y(y+1) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2400 \text{ です。}$$

$12 \cdot 13 \cdot 14 = 2184$, $13 \cdot 14 \cdot 15 = 2730$ なので条件を満たす整数 y はありません。

$$|x| = 3 \text{ のとき } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot (y-1)y(y+1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$$(y-1)y(y+1) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150 \text{ です。}$$

$4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$, $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ なので条件を満たす整数 y はありません。

$$|x| = 4 \text{ のとき } 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot (y-1)y(y+1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$$(y-1)y(y+1) = 2^3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \text{ より } y = 3 \text{ です。}$$

$$|x| = 5 \text{ のとき } 4^2 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot (y-1)y(y+1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2$$

$$(y-1)y(y+1) = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \text{ より } y = 2 \text{ です。}$$

$|x| \geq 6$ のとき

$$(x-1)^2 x^2 (x+1)^2 (y-1)y(y+1) \geq 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 264600 > 86400 \text{ です。}$$

よって、条件を満たす整数 y はありません。

以上より $(x, y) = (\pm 4, 3), (\pm 5, 2)$ です。