2023 年筑波大学問題 4

a, b は実数です。
x 軸と曲線 $y = |x + a\sin x + b\cos x|$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ で囲まれる部分を
x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を $V(a, b)$ とします。
$V(a, b)$ の最小値を求めてください。

解説・解答

$$\int_0^\pi x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}$$

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = \Big[x\big(-\cos x\big)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot(-\cos x)\,dx = \pi + \Big[\sin x\Big]_0^\pi = \pi$$

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi \big(1-\sin^2 x\big)\,dx = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
V(a,b) &= \pi\int_{-\pi}^{\pi} y^2 dx \\
&= \pi\int_{-\pi}^{\pi} \big(|x + a\sin x + b\cos x|\big)^2 dx \\
&= \pi\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\big(x + a\sin x\big)^2 + 2\big(x + a\sin x\big)\big(b\cos x\big) + \big(b\cos x\big)^2\Big)\,dx \\
&= 2\pi\int_0^{\pi} \Big(\big(x + a\sin x\big)^2 + \big(b\cos x\big)^2\Big)\,dx \qquad \text{(偶関数・奇関数の性質)} \\
&= 2\pi\left(\int_0^\pi x^2\,dx + 2a\int_0^\pi x\sin x\,dx + a^2\int_0^\pi \sin^2 x\,dx + b^2\int_0^\pi \cos^2 x\,dx\right) \\
&= \frac{2\pi^4}{3} + 4\pi^2 a + \pi^2 a^2 + \pi^2 b^2 \\
&= \pi^2\big(a+2\big)^2 - 4\pi^2 + \frac{2\pi^4}{3} + \pi^2 b^2
\end{aligned}$$

以上より、最小値は $V(-2,0) = \dfrac{2\pi^4}{3} - 4\pi^2$ です。