2023 **年東北大学理系問題** 2

m は正の実数です。
$\sin 3x + \sin x = 0 \ (0 < x \leqq m)$ を満たす x の個数を $p(m)$ とします。
極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{p(m)}{m}$ を求めてください。

解説・解答

三倍角の公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ を使い、因数分解します。
$\sin 3x + \sin x = 4\sin x - 4\sin^3 x = 4\sin x(1+\sin x)(1-\sin x) = 0$
よって $\sin x = 0, \pm 1$ なので $x = \dfrac{n\pi}{2}$ (n は整数) です。

正の実数 m が $\dfrac{n\pi}{2} \leqq m < \dfrac{(n+1)\pi}{2}$ を満たすとき $p(m) = n$, $\dfrac{2m}{\pi} - 1 < n \leqq \dfrac{2m}{\pi}$ です。

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m}\right) < \lim_{m\to\infty}\frac{n}{m} \leqq \frac{2}{\pi}$ なので $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m} = \frac{2}{\pi}$ です。

以上より $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{m} = \lim_{m\to\infty}\frac{n}{m} = \frac{2}{\pi}$ です。