2023 **年東北大学文系問題** 4

関数 $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}$ に対して 2 点 $P\bigl(x,f(x)\bigr)$, $Q\bigl(x+1,f(x)+1\bigr)$ を考えます。
x が範囲 $0 \leqq x \leqq 2$ を動くとき、
座標平面上で線分 PQ が通過してできる図形の面積 S を求めてください。

解説・解答

$y=f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{2}$ は頂点 $(1,0)$ で下に凸な放物線です。
範囲 $0 \leqq x \leqq 2$ で $P\big(x, f(x)\big)$ が描く曲線と $Q\big(x+1, f(x)+1\big)$ が描く曲線は交わりません。

$P_1\big(0, f(0)\big)$, $Q_1\big(0+1, f(0)+1\big)$, $P_2\big(2, f(2)\big)$, $Q_2\big(2+1, f(2)+1\big)$ と置きます。
$f(0)=f(2)=\dfrac{1}{2}$ なので $P_1\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $Q_1\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$, $P_2\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, $Q_2\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$ です。

線分 PQ が通過する領域は
曲線 $y=f(x)$, 曲線 $y=f(x)+1$, 線分 P_1Q_1, 線分 P_2Q_2 で囲まれた図形となります。

線分 P_1P_2 と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1 とし、
線分 Q_1Q_2 と曲線 $y=f(x)+1$ で囲まれた部分の面積を S_2 とし、
平行四辺形 $P_1P_2Q_2Q_1$ の面積を S_3 とします。

線分 P_1P_2 と線分 Q_1Q_2 は平行、
曲線 $y=f(x)+1$ は曲線 $y=f(x)$ を平行移動したものなので $S_1=S_2$ です。

$S_3 = P_1P_2 \cdot (\text{高さ}) = \Big(2-0\Big) \cdot \left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\right) = 2$ です。

以上より $S=S_1-S_2+S_3=S_3=2$ です。