

### 2023年東北大学文系問題 3

実数  $x$  が範囲  $a \leq x \leq a + 3$  を動くとき  $f(x) = x^2 + 2ax - 3$  の最小値を  $m(a)$  とします。  
 $a$  がすべての実数を動くとき  $m(a)$  の最小値を求めてください。

## 解説・解答

$$f(x) = x^2 + 2ax - 3 = (x + a)^2 - a^2 - 3$$

$y = f(x)$  のグラフは下に凸な放物線で頂点は  $(-a, -a^2 - 3)$  です。

$-a \leq a$  のとき、範囲  $a \leq x \leq a + 3$  で  $f(x)$  は増加です。

よって  $a \geq 0$  で  $m(a) = f(a) = 3a^2 - 3$  です。

$$m(a) \geqq m(0) = -3$$
 です。

$a \leq -a \leq a + 3$  のとき、範囲  $a \leq x \leq a + 3$  に頂点  $(-a, -a^2 - 3)$  を含みます。

よって  $-\frac{3}{2} \leq a \leq 0$  で  $m(a) = f(-a) = -a^2 - 3$  です。

$$m(a) \geqq m\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{21}{4}$$
 です。

$a + 3 \leq -a$  のとき、範囲  $a \leq x \leq a + 3$  で  $f(x)$  は減少です。

よって  $a \leq -\frac{3}{2}$  で  $m(a) = f(a + 3) = 3a^2 + 12a + 6 = 3(a + 2)^2 - 6$  です。

$$m(a) \geqq m(-2) = -6$$
 です。

以上より、求める最小値は  $m(-2) = -6$  です。