

2023年東北大学文系問題 3

実数 x が範囲 $a \leq x \leq a + 3$ を動くとき $f(x) = x^2 + 2ax - 3$ の最小値を $m(a)$ とします。
 a がすべての実数を動くとき $m(a)$ の最小値を求めてください。

解説・解答

$$f(x) = x^2 + 2ax - 3 = (x + a)^2 - a^2 - 3$$

$y = f(x)$ のグラフは下に凸な放物線で頂点は $(-a, -a^2 - 3)$ です。

$-a \leq a$ のとき、範囲 $a \leq x \leq a + 3$ で $f(x)$ は増加です。

よって $a \geq 0$ で $m(a) = f(a) = 3a^2 - 3$ です。

$$m(a) \geq m(0) = -3 \text{ です。}$$

$a \leq -a \leq a + 3$ のとき、範囲 $a \leq x \leq a + 3$ に頂点 $(-a, -a^2 - 3)$ を含みます。

よって $-\frac{3}{2} \leq a \leq 0$ で $m(a) = f(-a) = -a^2 - 3$ です。

$$m(a) \geq m\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{21}{4} \text{ です。}$$

$a + 3 \leq -a$ のとき、範囲 $a \leq x \leq a + 3$ で $f(x)$ は減少です。

よって $a \leq -\frac{3}{2}$ で $m(a) = f(a + 3) = 3a^2 + 12a + 6 = 3(a + 2)^2 - 6$ です。

$$m(a) \geq m(-2) = -6 \text{ です。}$$

以上より、求める最小値は $m(-2) = -6$ です。