2023 **年東北大学文系問題** 2

平面上に点 O を中心とするの半径 1 の円 C があります。
点 O から距離 4 だけ離れた点 L をとり、
点 L を通る円 C の 2 本の接線と円 C との接点を M, N とします。
三角形 LMN の内接円の半径 r と外接円の半径 R を求めてください。

解説・解答

対称性により三角形 OLM と三角形 OLN は合同です。
円の半径とその接線は直交するので $\angle OML = \angle ONL = 90^\circ$ です。
半径 1 の円なので $OM = ON = 1$、L は O から 4 だけ離れた点なので $OL = 4$ です。
三平方の定理を使い $LM = NL = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ です。

M から OL に下した垂線の足を H として $\angle LOM = \angle LMH = \theta$ と置きます。
三角形 OLM で $\cos\theta = \dfrac{OM}{OL} = \dfrac{1}{4}$, $\sin\theta = \dfrac{LM}{OL} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ です。
三角形 OMH で $OH = OM\cos\theta = \dfrac{1}{4}$, $MH = OM\sin\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ です。
$MN = 2MH = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$, $HL = OL - OH = \dfrac{15}{4}$ です。

三角形 LMN の面積を 2 通りの方法で表します。
$\dfrac{1}{2} \cdot MN \cdot HL = \dfrac{1}{2} \cdot (LM + MN + NL) \cdot r$ より $r = \dfrac{MN \cdot HL}{LM + MN + NL} = \dfrac{3}{4}$ です。
正弦定理 $\dfrac{NL}{\sin\theta} = 2R$ より $R = \dfrac{NL}{2\sin\theta} = 2$ です。