

2023年立命館大学文系問題 1

3次方程式 $2x^3 + 2x^2 + 5x + 7 = 0$ の3つの解を α, β, γ とします。
 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} \right)$ の値を求めてください。

解説・解答

3次方程式 $2x^3 + 2x^2 + 5x + 7 = 0$ の 3つの解が α, β, γ なので

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^3 + 2x^2 + 5x + 7 \\&= 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\&= 2x^3 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - 2\alpha\beta\gamma\end{aligned}$$

係数を比べて $2 = -2(\alpha + \beta + \gamma)$, $5 = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$, $7 = -2\alpha\beta\gamma$

よって $\alpha + \beta + \gamma = -1$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{5}{2}$, $\alpha\beta\gamma = -\frac{7}{2}$ です。

$$\begin{aligned}&(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \\&= (\alpha + \beta + \gamma - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma - \alpha)(\alpha + \beta + \gamma - \beta) \\&= (-1 - \gamma)(-1 - \alpha)(-1 - \beta) \\&= \frac{f(-1)}{2} = \frac{-2 + 2 - 5 + 7}{2} = 1\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} \right) = \left(\frac{\gamma}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\alpha}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta}{\alpha\beta\gamma} \right) = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} \right) = \frac{2}{7}$$

以上より $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} \right) = \frac{2}{7}$ です。