

2023年大阪公立大学文系問題 2

すべての自然数  $n$  で  $a_n = \frac{5^{2^{n-1}} - 1}{2^{n+1}}$  は奇数であることを示してください。

解説・解答

$$a_1 = \frac{5^1 - 1}{2^2} = 1 \text{ は奇数です。}$$

自然数  $k$  で  $a_k$  が奇数だとすると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{5^{2^k} - 1}{2^{k+2}} \\ &= \frac{5^{2^{k-1}} + 1}{2} \cdot \frac{5^{2^{k-1}} - 1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{(4 + 1)^{2^{k-1}} + 1}{2} \cdot a_k \\ &= \frac{\{(4 \text{ の倍数}) + 1\} + 1}{2} \cdot a_k \\ &= \frac{(4 \text{ の倍数}) + 2}{2} \cdot a_k \\ &= \{(2 \text{ の倍数}) + 1\} \cdot a_k \end{aligned}$$

よって  $a_{k+1}$  は奇数です。

数学的帰納法により、すべての自然数  $n$  で  $a_n$  は奇数です。