2023 **年大阪大学理系問題** 5

サイコロを n 回投げ、k 回目に出た目を a_k とします。
$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_1^{n-k} a_k$ が 7 の倍数となる確率 p_n を求めてください。

解説・解答

サイコロの目は $1, 2, 3, 4, 5, 6$ なので、$b_1 = a_1$ は 7 の倍数ではありません。
よって $p_1 = 0$ です。

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_1^{(n+1)-k} a_k = a_1 \sum_{k=1}^{n} a_1^{n-k} a_k + a_{n+1} = a_1 b_n + a_{n+1}$$

b_n が 7 の倍数のとき
$b_{n+1} = (7\text{ の倍数}) + a_{n+1}$ なので、b_{n+1} は 7 の倍数ではありません。

b_n が 7 の倍数でないとき
$b_{n+1} = (7\text{ で割った余りが }1, 2, 3, 4, 5, 6) + a_{n+1}$ なので、b_{n+1} は $\dfrac{1}{6}$ の確率で 7 の倍数です。

よって $p_{n+1} = \left(1 - p_n\right) \cdot \dfrac{1}{6}$ です。

$p_{n+1} - \dfrac{1}{7} = -\dfrac{1}{6}\left(p_n - \dfrac{1}{7}\right)$ に式変形できるので $p_n - \dfrac{1}{7} = \left(p_1 - \dfrac{1}{7}\right)\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$ です。

ゆえに $p_n = \dfrac{1}{7}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$ です。