

2023年京都大学理系問題 1

整式 $x^{2023} - 1$ を $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で割った余りを求めてください。

解説・解答

$$\begin{aligned}x^{2023} - 1 &= (x - 1) \left(x^{2022} + x^{2021} + x^{2020} + x^{2019} + x^{2018} + \dots + x^2 + x + 1 \right) \\&= (x - 1) \left\{ \sum_{k=0}^{403} \left(x^{2022-5k} + x^{2021-5k} + x^{2020-5k} + x^{2019-5k} + x^{2018-5k} \right) + (x^2 + x + 1) \right\} \\&= (x - 1) \left\{ (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \sum_{k=0}^{403} x^{2018-5k} + (x^2 + x + 1) \right\} \\&= (x - 1) \left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \right) \sum_{k=0}^{403} x^{2018-5k} + (x - 1) (x^2 + x + 1) \\&= (x - 1) \left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \right) \sum_{k=0}^{403} x^{2018-5k} + (x^3 - 1)\end{aligned}$$

以上より、整式 $x^{2023} - 1$ を $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で割った余りは $x^3 - 1$ です。