2023 **年京都大学理系問題** *6*

p は 3 以上の素数です。
$\cos\dfrac{m\pi}{n}=\dfrac{1}{p}$ となる正の整数 m,n が存在するかどうか調べてください。

解説・解答

$n=1$ のとき $\cos m\pi=(-1)^m=\dfrac{1}{p}$ なので条件を満たす正の整数 m は存在しません。

二倍角の公式，三倍角の公式より $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1\,,\quad \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ です。
和積公式より $\cos(n+2)\theta+\cos n\theta=2\cos(n+1)\theta\cdot\cos\theta$ なので
$\cos(n+2)\theta=2\cos(n+1)\theta\cdot\cos\theta-\cos n\theta$ です。

$f_n(x)$ を整数係数 n 次以下の整式とします。
$n\geqq 2$ のとき $\cos n\theta=2^{n-1}\cos^n\theta+f_{n-2}(\cos\theta)$ と推定できます。
$n=2,3$ では成り立っています。$n=k,k+1$ で成り立っているとすると

$$\begin{aligned}\cos(k+2)\theta&=2\cos(k+1)\cos\theta-\cos k\theta\\&=2\{2^k\cos^{k+1}\theta+f_{k-1}(\cos\theta)\}\cos\theta-\{2^{k-1}\cos^k\theta+f_{k-2}(\cos\theta)\}\\&=2^{k+1}\cos^{k+2}\theta+\{2f_{k-1}(\cos\theta)\cos\theta-2^{k-1}\cos^k\theta-f_{k-2}(\cos\theta)\}\\&=2^{k+1}\cos^{k+2}\theta+f_k(\cos\theta)\end{aligned}$$

よって $n=k+2$ でも成り立ちます。
数学的帰納法により $n\geqq 2$ の整数 n で $\cos n\theta=2^{n-1}\cos^n\theta+f_{n-2}(\cos\theta)$ です。
$\theta=\dfrac{m\pi}{n}$ と置き $\cos n\theta=\cos m\pi=(-1)^m$, $\cos\theta=\dfrac{1}{p}$ を代入すると
$(-1)^m=\dfrac{2^{n-1}}{p^n}+f_{n-2}\left(\dfrac{1}{p}\right)$ です。
$2^{n-1}=p^n\cdot(-1)^m-p^n\cdot f_{n-2}\left(\dfrac{1}{p}\right)$ に式変形できます。
右辺は p の倍数ですが左辺は p の倍数ではありません。
よって、条件を満たす正の整数 m,n は存在しません。

以上より $\cos\dfrac{m\pi}{n}=\dfrac{1}{p}$ となる正の整数 m,n は存在しません。