

2023年京都大学理系問題 3

サイコロを n 回投げて出た目を順に $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ とします。
 n 個の数の積 $Y_n = X_1 X_2 X_3 \cdots X_n$ が 15 で割り切れる確率 P_n を求めてください。

解説・解答

3で割り切れない場合、1, 2, 4, 5の目だけが出るときです。

よって 3で割り切れない確率は $P_n(A) = \left(\frac{4}{6}\right)^n$ です。

5で割り切れない場合、1, 2, 3, 4, 6の目だけが出るときです。

よって 5で割り切れない確率は $P_n(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ です。

3でも5でも割り切れない場合、1, 2, 4の目だけが出るときです。

よって 3でも5でも割り切れない確率は $P_n(A \cap B) = \left(\frac{3}{6}\right)^n$ です。

15で割り切れない確率は $P_n(A \cup B) = P_n(A) + P_n(B) - P_n(A \cap B) = \frac{5^n + 4^n - 3^n}{6^n}$

15で割り切れる確率は $P_n = 1 - P_n(A \cup B) = \frac{6^n - 5^n - 4^n + 3^n}{6^n}$ です。