2023 年京都大学文系問題 5

恒等式 $f(x)+\displaystyle\int_{-1}^{1}(x-y)^2 f(y)dy = 2x^2 + x + \frac{5}{3}$ を満たす関数 $f(x)$ を求めてください。

解説・解答

$$f(x)=2x^2+x+\frac{5}{3}-\int_{-1}^{1}(x-y)^2f(y)dy$$
$$=\Big(2-\int_{-1}^{1}f(y)dy\Big)x^2+\Big(1+2\int_{-1}^{1}yf(y)dy\Big)x+\Big(\frac{5}{3}-\int_{-1}^{1}y^2f(y)dy\Big)$$

よって $f(x)$ は 2 次以下の整式なので $f(x)=ax^2+bx+c$ と置きます。

$$\int_{-1}^{1}f(y)dy=\int_{-1}^{1}(ay^2+by+c)dy=2\int_{0}^{1}(ay^2+c)dy=\frac{2a}{3}+2c$$
$$2\int_{-1}^{1}yf(y)dy=\int_{-1}^{1}(ay^3+by^2+cy)dy=4\int_{0}^{1}(by^2)dy=\frac{4b}{3}$$
$$\int_{-1}^{1}y^2f(y)dy=\int_{-1}^{1}(ay^4+by^3+cy^2)dy=2\int_{0}^{1}(ay^2+c)dy=\frac{2a}{5}+\frac{2c}{3}$$

$ax^2+bx+c=\Big(2-\dfrac{2a}{3}-2c\Big)x^2+\Big(1+\dfrac{4b}{3}\Big)x+\Big(\dfrac{5}{3}-\dfrac{2a}{5}-\dfrac{2c}{3}\Big)$ です。

係数を比べて $a=2-\dfrac{2a}{3}-2c$, $\quad b=1+\dfrac{4b}{3}$, $\quad c=\dfrac{5}{3}-\dfrac{2a}{5}-\dfrac{2c}{3}$ です。

連立方程式として解くと $a=0$, $b=-3$, $c=1$ です。

以上より $f(x)=-3x+1$ です。