2023 年京都大学文系問題 4

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たしています。

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad a_1 = 3\,, \quad a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1)\cdot 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

一般項 a_n を求めてください。

解説・解答

$n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$ なので

$a_n = \dfrac{S_n}{n} + (n-1) \cdot 2^n$ より　$S_n - S_{n-1} = \dfrac{S_n}{n} + (n-1) \cdot 2^n$ です。

$\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{S_{n-1}}{n-1} = 2^n$ に式変形できるので、$n \geqq 2$ で階差数列の公式を使います。

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + \sum_{k=2}^{n} 2^k = \frac{a_1}{1} + \sum_{k=2}^{n} 2^k = 3 + \sum_{k=2}^{n} 2^k = 1 + 2 + \sum_{k=2}^{n} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

$$a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1) \cdot 2^n = (2^{n+1} - 1) + (n-1) \cdot 2^n = (n+1) \cdot 2^n - 1$$

この式は $n = 1$ でも成り立っています。