

2023年京都大学文系問題 3

半径1の円に内接する正5角形の一辺の長さが1.15より大きいか否かを調べてください。

解説・解答

$\cos(3 \cdot 72^\circ) = \cos(360^\circ - 2 \cdot 72^\circ) = \cos(2 \cdot 72^\circ)$ です。

二倍角の公式と三倍角の公式を適用して
 $4 \cos^3 72^\circ - 3 \cos 72^\circ = 2 \cos^2 72^\circ - 1$ です。

左辺にまとめて因数分解して
 $(\cos 72^\circ - 1)(4 \cos^2 72^\circ + 2 \cos 72^\circ - 1) = 0$ です。

$0 < \cos 72^\circ < 1$ なので $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ です。

円の中心点を P , 正五角形の一辺を AB とします。

三角形 PAB に余弦定理を使うと

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 72^\circ = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ です。}$$

$2.2 < \sqrt{5} < 2.3$ です。

$AB^2 - 1.15^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} - 1.3225 = \frac{2.355 - \sqrt{5}}{2} > 0$ なので
半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さの方が 1.15 より大きいです。