2023 年九州大学理系問題 *1*

複素数平面上の三角形 ABC の頂点を表す複素数をそれぞれ α, β, γ とします。
$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$ のとき、三角形 ABC はどのような三角形ですか。

解説・解答

$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=(\beta-\alpha)^4+\{(\beta-\alpha)-(\gamma-\alpha)\}^4+(\gamma-\alpha)^4=0$
$(\beta-\alpha)^4$ で割り $z=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ と置けば $1+(1-z)^4+z^4=0$ です。
整理して因数分解すると $z^4-2z^3+3z^2-2z+1=(z^2-z+1)^2=0$ なので
$z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$ です。

よって $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{\pi}{3}\right),\quad \left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$ です。

以上より $\angle CAB=\dfrac{\pi}{3}$, $CA=AB$ なので、三角形 ABC は正三角形です。