2023 年九州大学文系問題 4

方程式 $x^3=1$ の解で虚部が正であるものを ω とします。
サイコロを繰り返し投げ、次の規則で $z_1, z_2, z_3. \cdots$ を定めます。

$z_1 = 0$

z_k まで定まった後、サイコロを投げて出た目を t とします。

$z_k = 0$ のとき $z_{k+1} = \omega^t$

$z_k \neq 0$, $t = 1, 2$ のとき $z_{k+1} = 0$

$z_k \neq 0$, $t = 3$ のとき $z_{k+1} = \omega z_k$

$z_k \neq 0$, $t = 4$ のとき $z_{k+1} = \overline{\omega z_k}$

$z_k \neq 0$, $t = 5$ のとき $z_{k+1} = z_k$

$z_k \neq 0$, $t = 6$ のとき $z_{k+1} = \overline{z_k}$

$z_n = 1$ となる確率を求めてください。

解説・解答

$z_n = 0, 1, \omega, \omega^2$ となる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とします。
$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$
$z_1 = 0$ なので $p_1 = 1$, $q_1 = r_1 = s_1 = 0$ です。

z_{n+1} を定める規則より

$$p_{n+1} = (1 - p_n) \cdot \frac{2}{6} \qquad \cdots (1)$$
$$q_{n+1} = p_n \cdot \frac{2}{6} + q_n \cdot \frac{2}{6} + s_n \cdot \frac{2}{6} \qquad \cdots (2)$$
$$r_{n+1} = p_n \cdot \frac{2}{6} + q_n \cdot \frac{1}{6} + r_n \cdot \frac{2}{6} + s_n \cdot \frac{1}{6} \qquad \cdots (3)$$
$$s_{n+1} = p_n \cdot \frac{2}{6} + q_n \cdot \frac{1}{6} + r_n \cdot \frac{2}{6} + s_n \cdot \frac{1}{6} \qquad \cdots (4)$$

(1) は $p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$ に式変形できます。
よって $p_n - \frac{1}{4} = \left(p_1 - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ なので $p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ です。

(3), (4) と $r_1 = s_1 = 0$ より $r_n = s_n$ なので (2), (3) は次のようになります。
$q_{n+1} = \frac{p_n}{3} + \frac{q_n}{3} + \frac{r_n}{3}$, $r_{n+1} = \frac{p_n}{3} + \frac{q_n}{6} + \frac{r_n}{2}$

$q_{n+1} - r_{n+1} = \left(\frac{p_n}{3} + \frac{q_n}{3} + \frac{r_n}{3}\right) - \left(\frac{p_n}{3} + \frac{q_n}{6} + \frac{r_n}{2}\right) = \frac{q_n - r_n}{6}$ です。
よって $q_n - r_n = \frac{q_1 - r_1}{6^{n-1}} = \frac{0 - 0}{6^{n-1}} = 0$ なので $q_n = r_n$ です。

$1 = p_n + q_n + r_n + s_n = p_n + q_n + q_n + q_n = p_n + 3q_n$ なので
$q_n = \frac{1 - p_n}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ です。

以上より、$z_n = 1$ となる確率は $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ です。