2023 年神戸大学文系問題 3

a は正の実数です。
2 つの円 $C_1 : x^2 + y^2 = a$, $C_2; x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ が異なる 2 点 A, B で交わるとき、
直線 AB が x 軸, y 軸 と交わる点をそれぞれ $(p, 0), (0, q)$ とします。
p, q が共に整数となる a の値を求めてください。

解説・解答

直線 AB の方程式は C_1 の式から C_2 の式を引けば良いので
$(x^2+y^2-a)-(x^2+y^2-6x-4y+3)=6x+4y-a-3=0$ です。

円 $C_1 : x^2+y^2=a$ と直線 $AB : 6x+4y-a-3=0$ は異なる 2 点 A, B で交わるので
直線 AB と円 C_1 の中心 $(0,0)$ との距離は半径 $\sqrt{a}$ 未満です。
点と直線の距離の公式を使い $\dfrac{|-a-3|}{\sqrt{6^2+4^2}}<\sqrt{a}$ です。
この不等式を解いて $23-2\sqrt{130}<a<23+2\sqrt{130}$ です。

直線 AB は点 $(p,0),(0,q)$ を通るので $6p-a-3=0$，$4q-a-3=0$ です。
よって $p=\dfrac{a+3}{6}$，$q=\dfrac{a+3}{4}$，$3p=2q$ です。

p, q が整数のとき、$3p=2q$ なので p は 2 の倍数、q は 3 の倍数です。
$k=\dfrac{a+3}{12}$ と置けば k は整数で $(a,p,q)=(12k-3,\ 2k,\ 3k)$ です。

$k=\dfrac{a+3}{12}$ に a の範囲 $23-2\sqrt{130}<a<23+2\sqrt{130}$ をあてはめます。
$\dfrac{13-\sqrt{130}}{6}<k<\dfrac{13+\sqrt{130}}{6}$ です。
$11<\sqrt{130}<12$ なので $0<k<5$ です。よって $k=1,2,3,4$ です。

以上より $a=9,21,33,45$ です。