2023 年神戸大学文系問題 *1*

a は実数、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2} & (x \leqq 1)\\ 2x-1 & (x>1)\end{cases}$ です。
数列 $\{a_n\}$ を $a_1=a$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定めます。
一般項 a_n を求めてください。

解説・解答

$a \leqq 1$ のとき
$a_1 = a \leqq 1$、自然数 k で $a_k \leqq 1$ なら $a_{k+1} = \dfrac{a_k + 1}{2} \leqq \dfrac{1+1}{2} = 1$ です。
数学的帰納法により、全ての自然数 n で $a_n \leqq 1$ です。
よって $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{2}$ $(1, 2, 3, \cdots)$ です。
$a_{n+1} - 1 = \dfrac{a_n - 1}{2}$ に式変形できるので $a_n - 1 = \dfrac{a-1}{2^{n-1}}$ です。

$a > 1$ のとき
$a_1 = a > 1$、自然数 k で $a_k > 1$ なら $a_{k+1} = 2a_k - 1 > 2 - 1 = 1$ です。
数学的帰納法により、全ての自然数 n で $a_n > 1$ です。
よって $a_{n+1} = 2a_n - 1$ $(1, 2, 3, \cdots)$ です。
$a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$ に式変形できるので $a_n - 1 = (a-1) \cdot 2^{n-1}$ です。

以上より $a_n = \begin{cases} \dfrac{a-1}{2^{n-1}} + 1 & (a \leqq 1) \\ (a-1) \cdot 2^{n-1} + 1 & (a > 1) \end{cases}$ です。