

2023年関西学院大学理系問題 3

x 軸と曲線 $y = e^{-2x} \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) で囲まれる部分を
 x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めてください。

解説・解答

$$\begin{aligned}(e^{-4x} \sin 2x)' &= -4e^{-4x} \sin 2x + 2e^{-4x} \cos 2x \\(e^{-4x} \cos 2x)' &= -4e^{-4x} \cos 2x - 2e^{-4x} \sin 2x \\ \text{よって } e^{-4x} \cos 2x &= \frac{(e^{-4x} \sin 2x)' - 2(e^{-4x} \cos 2x)'}{10} \text{ です。}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^\pi y^2 dx \\ &= \pi \int_0^\pi (e^{-2x} \sin x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^\pi e^{-4x} \sin^2 x dx \\ &= \pi \int_0^\pi e^{-4x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (e^{-4x} - e^{-4x} \cos 2x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \left(e^{-4x} - \frac{(e^{-4x} \sin 2x)' - 2(e^{-4x} \cos 2x)'}{10} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x} \sin 2x - 2e^{-4x} \cos 2x}{10} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\left(-\frac{e^{-4\pi}}{4} + \frac{e^{-4\pi}}{5} \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \right) \\ &= \frac{\pi(1 - e^{-4\pi})}{40}\end{aligned}$$