2023 年慶應義塾大学総合政策学部問題 3

すごろくゲームで最初は 1 マス目にあり、
コイン投げをして表なら 2 マス進み、裏なら 1 マス進みます。
コイン投げを繰り返し行いマス目を進みます。
n マス目 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に止まる確率を求めてください。

解説・解答

n マス目に止まる確率を p_n とします。

最初は 1 マス目にあるので $p_1 = 1$

1 マス目で裏が出ると 2 マス目に止まります。
$p_2 = p_1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ です。

n マス目で表が出る、または $n+1$ マス目で裏が出ると $n+2$ マス目に止まります。
$p_{n+2} = p_{n+1} \cdot \dfrac{1}{2} + p_n \cdot \dfrac{1}{2}$ です。
$p_{n+2} - p_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\left(p_{n+1} - p_n\right)$ に式変形できるので
$p_{n+1} - p_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_2 - p_1\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ です。

$n \geqq 2$ のとき

$$p_n = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(p_{k+1} - p_k\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k} = 1 + \frac{(-\frac{1}{2})\{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}\}}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(この式は $n = 1$ でも成立しています。)

以上より、n マス目 に止まる確率は $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ です。

解説・解答 *2*

n マス目に止まる確率を p_n とします。
n マス目に止まらない確率は $1-p_n$ です。

最初は1マス目にあるので $p_1=1$

n マス目で表が出ると $n+1$ マス目には止まりません。
$1-p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{1}{2}$ です。
$p_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{2}{3}\right)$ に式変形できるので $p_n-\dfrac{2}{3}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1-\dfrac{2}{3}\right)$
よって $p_n=\dfrac{2}{3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ です。

以上より、n マス目 に止まる確率は $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ です。