2023 **年慶應義塾大学総合政策学部問題** *1*

整数 n の正の約数の個数を $d(n)$ とします。
2023 以下の正の整数 n で $d(n)$ の最大値を求めてください。

解説・解答

$A, B, C, \cdots$ は異なる素数、$a, b, c, \cdots$ は 0 以上の整数として
$d(A^a B^b C^c \cdots) = (a+1)(b+1)(c+1)\cdots$ です。

同じ位の大きさの数なら小さな素数を使った数の方が約数の数が多くなります。
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210\,, \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 2023$
よって $n = 2^a 3^b 5^c 7^d \leqq 2023$ を考えます。
a, b, c, d を入れ替えても約数の個数は同じなので $a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$ を考えれば良いです。

2^a のパターン
$d(2^{10} \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0) = d(1024) = 11$
$2^{11} \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 2048 > 2023$

$2^a \cdot 3^b$ のパターン
$d(2^9 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0) = d(1536) = 10 \cdot 2 = 20$
$d(2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0) = d(1152) = 8 \cdot 3 = 24$
$d(2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^0) = d(1726) = 7 \cdot 4 = 28$
$d(2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \cdot 7^0) = d(1296) = 5 \cdot 5 = 25$
$2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 7776 > 2023$

$2^a \cdot 3^b \cdot 5$ のパターン
$d(2^7 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0) = d(1920) = 8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
$d(2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0) = d(1440) = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$
$d(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^0) = d(1080) = 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$
$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 6480 > 2023$

$2^a \cdot 3^b \cdot 5^2$ のパターン
$d(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^0) = d(1800) = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$
$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^0 = 5400 > 2023$

$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7$ のパターン
$d(2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1) = d(1680) = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 40$
$d(2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1) = d(1260) = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$
$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 7560 > 2023$
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 6300 > 2023$

以上より、最大値は $d(1680) = 40$ です。